GROUPE A

EPREUVE PRATIQUE
(Durée: 3 h)

Notations :

(z_k) suite de nombres complexes indexée par **N**.

S ensemble des suites complexes convergentes.

B ensemble des suites complexes bornées.

(f_k) suite de fonctions de **R** dans **C** indexée par **N**.

I désignant l'intervalle $]b, +\infty[$ où $b \in \{-\infty\} \cup \mathbf{R}$ on note $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbf{C})$ l'espace vectoriel des applications de I dans **C** et $\mathcal{F}_1(\mathrm{I}, \mathbf{C})$ le sous-espace vectoriel des applications de I dans **C** admettant une limite finie lorsque la variable réelle tend vers $+\infty$.

I

1° Montrer que si $(z_k) \in \mathrm{B}$ et si $\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(a)|$ converge pour tout a, $a \in]b, +\infty[$, alors $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(a)\, z_k$ converge pour $a \in]b, +\infty[$ et définit une fonction g de a sur $]b, +\infty[$:

$$(1) \qquad g(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(a)\, z_k \quad .$$

2° On suppose que (z_k) est élément de S et que les fonctions f_k vérifient les 3 conditions :

C_1 il existe $d \in \{-\infty\} \cup \mathbf{R}$ et $\mathrm{M} > 0$ ne dépendant que de d tels que :

$$(\forall a \in]d, +\infty[) \qquad \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(a)| \leqslant \mathrm{M}\right)$$

C_2 $\lim_{a \to +\infty} f_k(a) = \alpha_k \qquad \alpha_k \in \mathbf{C}$.

C_3 $\lim_{a \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(a)\right) = \alpha \qquad \alpha \in \mathbf{C}$.

Montrer que (1) définit une fonction $g \in \mathcal{F}(]d, +\infty[, \mathbf{C})$ et que g a une limite dans $\mathbf{C}$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Montrer que si (z_k) est une suite de limite z alors

$$\lim_{a \to +\infty} g(a) = \alpha z + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k (z_k - z) \quad .$$

II

On note T la transformation définie sur S qui à (z_k) élément de S associe g définie par la relation (1).

1° On suppose que T prend ses valeurs dans $\mathcal{F}_1(]b, +\infty[, \mathbf{C})$.

Montrer que les fonctions f_k vérifient C_2 et C_3.

2° Soit (a_k) une suite de complexes telle que $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ diverge.

Montrer qu'on peut trouver une suite (z_k) de limite nulle telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k z_k \right| = +\infty \quad .$$

En déduire que si T prend ses valeurs dans $\mathcal{F}(]b, +\infty[, \mathbf{C})$, la condition suivante, plus faible que C_1, est vérifiée :

$$(\forall a \in]b, +\infty[) \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(a)| < +\infty \right) \quad .$$

3° Supposons que T prend ses valeurs dans $\mathcal{F}_1(]b, +\infty[, \mathbf{C})$ et que la condition C_1 n'est pas vérifiée.

a. Montrer qu'on peut trouver une suite (a_n) de réels telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(a_n)| = +\infty \quad .$$

Montrer que pour tout p fixé, entier supérieur à 1 :

$$\operatorname{Sup}_{n \in \mathbf{N}} \sum_{k=1}^{p} |f_k(a_n)| \text{ est fini.}$$

b. Soit β un réel quelconque strictement supérieur à 1. Montrer qu'à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer n_1 et p_1 entiers tels que :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{p_1} |f_k(a_{n_1})| > \beta^2 \\ \sum_{k=p_1+1}^{+\infty} |f_k(a_{n_1})| < \varepsilon \end{cases} \quad .$$

En déduire que si (z_k) est telle que

$$\begin{cases} 1 \leqslant k \leqslant p_1 & z_k f_k(a_{n_1}) = \dfrac{|f_k(a_{n_1})|}{\beta} \\ k > p_1 & |z_k| \leqslant 1 \end{cases} ,$$

on a $\quad |g(a_{n_1})| > \beta - \varepsilon$.

Montrer qu'on peut trouver deux suites d'entiers $p_1 < p_2 < \ldots$ et $n_1 < n_2 < \ldots$ et une suite de complexes (z_k) convergeant vers 0 telles que si k vérifie :

$$p_i < k \leqslant p_{i+1} \qquad \text{on ait} \qquad |z_k| = \frac{1}{\beta^{i+1}}$$

$$\text{et} \qquad |g(a_{n_i})| > \beta^i - \varepsilon \, .$$

En déduire que si T prend ses valeurs dans $\mathcal{F}_1(]b, +\infty[, \mathbf{C})$, C_1 est vérifiée.

III

Applications :

1° Chercher des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les fonctions f_k pour que g définie par (1) vérifie :

Quelle que soit la suite (z_k) convergente, $\lim_{a \to +\infty} g(a) = \lim_{k \to +\infty} z_k$.

Donner un exemple de suite (f_k) répondant à ces conditions.

2° Application aux suites :

Si f_k est définie sur $\mathbf{N}$ on pose $f_k(n) = a_{nk}$

$$g(n) = z'_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{nk} z_k \ .$$

Montrer que pour que T définie sur S prenne ses valeurs dans S il faut et il suffit :

C'_1 Il existe M indépendant de n tel que $\sum_{k=1}^{+\infty} | a_{nk} | \leqslant M$

C'_2 $\lim_{n \to +\infty} a_{nk} = \alpha_k \qquad \alpha_k \in \mathbf{C}$

C'_3 $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} a_{nk} = \alpha \qquad \alpha \in \mathbf{C}$.

3° Application aux séries à termes complexes :

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k c_k$ converge pour toutes les séries $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$ convergentes est que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} | b_k - b_{k+1} | \quad \text{converge.}$$

σ désignant le sous-ensemble de S constitué des (c_k) telles que $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$ converge, montrer que si les conditions suivantes sont vérifiées :

C''_1 il existe $b \in \{ -\infty \} \cup \mathbf{R}$ et $M > 0$ ne dépendant que de b tels que

$$(\forall a \in]b, +\infty[) \left(\sum_{k=1}^{+\infty} | h_k(a) - h_{k+1}(a) | \leqslant M \right)$$

C''_2 $\lim_{a \to +\infty} h_k(a) = \beta_k \qquad \beta_k \in \mathbf{C}$,

alors, pour toute suite (c_k) de σ, $\sum_{k=1}^{+\infty} h_k(a) c_k$ définit une fonction l de a sur $]b, +\infty[$ ayant une limite dans $\mathbf{C}$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Réciproquement, montrer que si

$$T' \ : \ (c_k) \longrightarrow l$$
$$(c_k) \in \sigma \qquad l \in \mathcal{F}_1(]b, +\infty[, \mathbf{C})$$
$$\text{avec } l(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} h_k(a) c_k \quad ,$$

alors C''_1 et C''_2 sont vérifiées.

Les fonctions h_k suivantes vérifient-elles les conditions C''_1 et C''_2 ?

$$h_k(a) = \left(\frac{a}{a+1} \right)^k$$

$$h_k(a) = \frac{1}{k!} \int_0^a e^{-t} t^k \, dt \quad .$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail